ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ОРТИМИЗАЦИИ»

СЕМЕСТР 1

Задача 1.1. Доказать теорему 1.4.

Задача 1.2. Доказать теорему 1.6.

Задача 1.3. Пусть непрерывная функция f имеет точку глобального минимума на $\mathbf{R}^n$. Следует ли отсюда, что f имеет точку глобального минимума на любом непустом замкнутом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$?

Задача 1.4*. Пусть непрерывные функции f и g имеют точки глобального минимума на $\mathbf{R}^n$. Следует ли отсюда, что их сумма $f+g$ имеет точку глобального минимума на $\mathbf{R}^n$?

Задача 1.5. Найти из геометрических соображений точку глобального минимума функции

$$f(x) = \max\{|x_1 - 2|,\, |x_2|\}$$

на множестве

$$X = \{x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 2|x_1| - |x_2| \leq 2\}.$$

Задача 1.6. Найти из геометрических соображений точку глобального минимума функции

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$$

на множестве

$$X = \{x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 2ax_1x_2\},$$

$a \in \mathbf{R}$.

Задача 1.7. При каких значениях параметра $a \in \mathbf{R}$ задача

$$x_1 + ax_2 \to \max, \quad x \in X,$$

$$X = \{x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^3 = 3x_1x_2\},$$

имеет глобальное решение, а при каких лишь локальное?

Задача 2.1. Для задачи из примера 2.2 доказать, что функция f — бесконечно растущая на множестве X (отсюда и из теоремы 1.2 будет следовать, что единственная стационарная точка этой задачи является ее глобальным решением).

Задача 2.2. Пусть A — неотрицательно определенная симметричная $n\times n$-матрица, $b \in \mathbf{R}^n$. Доказать, что любая критическая точка квадратичной функции

$$f(x) = \langle Ax,\, x\rangle + \langle b,\, x\rangle$$

является точкой ее глобального минимума на $\mathbf{R}^n$.

Задача 2.3*. Построить пример дифференцируемой на $\mathbf{R}^2$ функции, имеющей ровно одну критическую точку, которая является точкой ее локального, но не глобального минимума.

Задача 2.4. Доказать, что при любом значении параметра $a > 1$ система уравнений
$$a \cos x_1 \sin x_2 + x_1 e^{x_1^2 + x_2^2} = 0,$$
$$a \sin x_1 \cos x_2 + x_2 e^{x_1^2 + x_2^2} = 0$$
относительно $(x_1,\, x_2)$ имеет решение, отличное от $(0,\, 0)$.

Задача 3.1. Найти точки экстремума функции
$$f(x) = x_1^3/3 + x_2$$
при условии $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$, $x = (x_1,\, x_2) \in \mathbf{R}^2$ (ср. с примером 3.1).

Задача 3.2. Дать геометрическую интерпретацию задачи из примера 3.2.

Задача 3.3. Найти все точки локального и глобального экстремума функции
$$f(x) = \langle Ax,\, x\rangle$$
при условии $|x| = 1$, где A — симметричная $n \times n$-матрица.

Задача 3.4. Среди всех треугольников заданного периметра найти тот, который имеет наибольшую площадь.

Задача 3.5 (о стрельбе с высоты)**.** На заданной высоте над плоской поверхностью расположено артеллерийское орудие. Снаряд вылетает из орудия с заданной скоростью. Под каким углом к горизонту следует произвести выстрел, чтобы снаряд улетел как можно дальше?

Задача 4.1. Доказать формулу
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} E_I \\ A \end{pmatrix} = |I| + \operatorname{rank} A^J,$$
где $A \in \mathcal{A}(m,\, n)$, $I \cup J = \{1,\, \ldots,\, n\}$, $I \cap J = \varnothing$.

Задача 4.2 (теорема Александрова–Фана)**.** Пусть $A \in \mathcal{A}(m,\, n)$, $b \in \mathbf{R}^m$. Доказать, что имеет решение одна и только одна из двух систем:
$$Ax \leq b,$$
или
$$pA = 0, \quad \langle p,\, b\rangle < 0, \quad p \geq 0.$$

Задача 4.3* (теорема Вороного–Карвера)**.** Пусть $A \in \mathcal{A}(m,\, n)$, $b \in \mathbf{R}^m$. Доказать, что имеет решение одна и только одна из двух систем:
$$Ax < b,$$

или

$$pA = 0, \quad \langle p,\, b\rangle \le 0, \quad p \ge 0, \quad p \ne 0.$$

Задача 4.4* (теорема Штимке–Фана)**.** Пусть $A \in \mathcal{A}(m,\, n)$, $b \in \mathbf{R}^m$. Доказать, что имеет решение одна и только одна из двух систем:

$$Ax \le b, \quad Ax \ne b,$$

или

$$pA = 0, \quad \langle p,\, b\rangle \le 0, \quad p > 0.$$

Задача 5.1. Пусть полиэдр $X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \le b\}$ ограничен и имеет внутренние точки. Требуется вписать в X шар наибольшего радиуса. Сформулировать эту задачу как ЗЛП.

Задача 5.2. Построить задачу, двойственную к следующей *блочной* ЗЛП

$$\sum_{k=1}^{s} \langle c^k,\, x^k\rangle \to \max,$$

$$A_k x^k \le b^k, \quad k = 1,\, \dots,\, s,$$

$$\sum_{k=1}^{s} B_k x^k \le d,$$

$$x^k \ge 0, \quad k = 1,\, \dots,\, s,$$

где $c^k inR^{n_k}$, $A_k \in \mathcal{A}(m_k,\, n_k)$, $b^k \in \mathbf{R}^{m_k}$, $B_k \in \mathcal{A}(m,\, n_k)$, $k = 1,\, \dots,\, s$, $d \in \mathbf{R}^m$.

Задача 5.3. Построить задачу, двойственную к *динамической задаче планирования производства*

$$\sum_{t=1}^{T} \langle c^t,\, x^t\rangle \to \max,$$

$$Ax^t \le x^{t-1}, \quad t = 1,\, \dots,\, T,$$

$$x^t \ge 0, \quad t = 1,\, \dots,\, T,$$

где $c^t \in \mathbf{R}^n$, $t = 1,\, \dots,\, T$, $A \in \mathcal{A}(m,\, n)$, $x^0 \in \mathbf{R}^n$ задано.

Задача 5.4. Решить задачу

$$\langle c,\, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\langle a,\, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \quad x_j \ge 0, \quad j = 1,\, \dots,\, n,$$

где $c \in \mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$.

Задача 5.5. Решить задачу

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n \to \min,$$

$$x_1 \geq 1,$$

$$x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$\ldots$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geq n,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Задача 5.6. Множества решений ЗЛП может:

1) состоять из одной точки;

2) состоять более чем из одной точки, но быть ограниченным;

3) быть неограниченным.

Привести примеры, показывающие, что для множеств решений взаимодвойственных задач возможно любое сочетание этих случаев.

Задача 5.7*. Доказать, что допустимые множества основной ЗЛП и двойственной к ней не могут быть одновременно непустыми и ограниченными.

Задача 5.8* (задача о разгрузке состава)**.** На овощную базу прибыл железнодорожный состав, доставивший A тонн овощей. На базе имеется n хозрасчетных бригад грузчиков. Условия j-й бригады: разгрузка a_j тонн в день при расценке p_j рублей за тонну, $j = 1, \ldots, n$. За каждый день простоя состава база платит железной дороге штраф c рублей. Какие договоры база должна заключить с бригадами, чтобы стоимость разгрузки была минимальной?

Задача 6.1. Доказать теорему 6.2 без использования леммы 6.2, опираясь на теорию двойственности задач ЛП.

Задача 6.2. Доказать, что для невырожденной вершины x канонического полиэдра X справедливо утверждение, обратное утверждению теоремы 6.1: если x — решение задачи (1), то выполнено условие I, т.е. $\Delta_k \geq 0$, $\forall\, k \notin J$.

Задача 6.3. Привести пример, когда вырожденная вершина канонического полиэдра X является решением задачи (1), но условие I не выполнено.

Задача 6.4. Доказать, что для невырожденной вершины x канонического полиэдра X справедливо следующее уточнение результата задачи 6.2: если x — ! решение, то $\Delta_k > 0$, $\forall\, k \notin J$.

Задача 7.1. Доказать теорему 7.1.

Задача 7.2. Доказать теорему 7.2.

Задача 7.3. Доказать теорему 7.3.

Задача 7.4. Доказать теорему 7.4.

Задача 7.5. Доказать, что множество всевозможных выпуклых комбинаций точек любого множества $X \in \mathbf{R}^n$ выпукло.

Задача 7.6. Дать геометрическую интерпретацию доказательства утверждения 2) теоремы 7.18.

Задача 7.7. Пусть матрица $A \in \mathcal{A}(n, n)$ неотрицательно определена. Доказать, что $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}_+$ множество

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle \le \alpha\}$$

выпукло.

Задача 7.8. Доказать, что выпуклая оболочка открытого множества открыта.

Задача 7.9*. Пусть $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — линейный оператор, $X \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклое множество. Доказать, что образ

$$A(X) = \{y \in \mathbf{R}^m \mid y = Ax,\ x \in X\}$$

множества X при отображении A — выпуклое множество, причем

$$\operatorname{ri} A(X) = A(\operatorname{ri} X).$$

Задача 7.10*. Пусть $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — линейный оператор, $Y \subset \mathbf{R}^m$ — выпуклое множество. Доказать, что прообраз

$$A^{-1}(Y) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \in Y\}$$

множества Y при отображении A — выпуклое множество, причем если $A^{-1}(\operatorname{ri} Y) \ne \varnothing$, то

$$\operatorname{ri} A^{-1}(Y) = A^{-1}(\operatorname{ri} Y).$$

Привести пример, показывающий, что условие $A(Y) \ne \varnothing$ не обеспечивает последнего равенства.

Задача 7.11. Пусть $X_1,\, X_2 \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклые множества, $X_1 \subset X_2$ и $X_1 \cap \operatorname{ri} X_2 \ne \varnothing$. Доказать, что $\operatorname{ri} X_1 \subset \operatorname{ri} X_2$. Можно ли опустить условие $X_1 \cap \operatorname{ri} X_2 \ne \varnothing$?

Задача 7.12*. Пусть $X_1,\, X_2 \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклые множества. Доказать, что $\operatorname{ri}(X_1 + X_2) = \operatorname{ri} X_1 + \operatorname{ri} X_2$.

Задача 7.13*. Пусть $X_1,\, X_2 \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклые множества, $\operatorname{ri} X_1 \cap \operatorname{ri} X_2 \ne \varnothing$. Доказать, что

$$\operatorname{aff}(X_1 \cap X_2) = \operatorname{aff} X_1 \cap \operatorname{aff} X_2,$$

$$\overline{X_1 \cap X_2} = \overline{X_1} \cap \overline{X_2}, \quad \operatorname{ri}(X_1 \cap X_2) = \operatorname{ri} X_1 \cap \operatorname{ri} X_2,$$

$$\dim(X_1 \cap X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 + X_2).$$

Привести примеры, показывающие, что условие $X_1 \cap X_2 \ne \varnothing$ не обеспечивает этих равенств.

Задача 7.14*. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — неограниченное выпуклое множество. Доказать следующие утверждения (ср. с теоремой 7.18):

1) $\forall\, x \in \operatorname{ri} X \ \exists\, h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} : l_{xh}^{+} \subset \operatorname{ri} X$;

2) если $l_{x^*h}^{+} \subset \overline{X}$ при некоторых $x^* \in \overline{X}$ и $h \in \mathbf{R}^n$, то $l_{xh}^{+} \subset \operatorname{ri} X \ \forall\, x \in \operatorname{ri} X$.

Задача 8.1. Доказать, что проекция любой точки $a \in \mathbf{R}^n$ на замкнутое выпуклое множество $X \subset \mathbf{R}^n$ единственна.

Задача 8.2. Основываясь на теоремах 8.1 и 7.9 (о замкнутости многогранного конуса) доказать лемму Минковского–Фаркаша (теорема 4.6).

Задача 8.3. Основываясь на теореме 8.3 доказать теорему 8.2.

Задача 8.4. Доказать достаточную часть утверждения теоремы 8.6 (провести рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены при доказательстве достаточной части утверждения теоремы 8.5).

Задача 8.5. Доказать теорему 8.8.

Задача 8.6. Доказать, что если выпуклое множество $X \subset \mathbf{R}^n$ не является одноточечным, то

$$E(X) \subset \mathrm{r}\partial\, X.$$

Задача 8.7. Доказать, что для любого выпуклого множества $X \subset \mathbf{R}^n$ справедливо: $\mathrm{r}\partial\, X = \emptyset \iff X$ аффинно.

Задача 8.8. Доказать, что непустой полиэдр

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \le b\},$$

где $A \in \mathcal{A}(m,\, n)$, $b \in \mathbf{R}^m$, не содержит прямых $\iff \operatorname{rank} A = n$.

Задача 8.9. Доказать следствие теоремы 8.13.

Задача 8.10. Доказать следующие утверждения:

1) любая гиперплоскость, опорная к конусу в $\mathbf{R}^n$, проходит через 0;

2) любая гиперплоскость, опорная к аффинному множеству в $\mathbf{R}^n$, содержит это множество.

Задача 8.11. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество, причем $X \ne \emptyset$, $X \ne \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^n \setminus X$ — выпуклое множество. Доказать, что X — полупространство.

Задача 8.12*. Доказать, что два непересекающихся полиэдра в $\mathbf{R}^n$ сильно отделимы (воспользоваться теоремой Александрова–Фана из задачи 4.2).

Задача 8.13*. Доказать, что единичный шар $U_1(0)$ — ! множество в $\mathbf{R}^n$, которое совпадает со своим сопряженным.

Задача 8.14*. Привести пример выпуклого компакта в $\mathbf{R}^n$, множество крайних точек которого незамкнуто.

Задача 8.15. Доказать, что образ и прообраз полиэдра (многогранного множества) при линейном отображении есть полиэдр (многогранное множество).